

OLIMPIADELE DE MATEMATICĂ

**2000 – 2001
CLASELE V-X**

EDITURA GIL

I. Olimpiada națională de matematică: etapa locală

1. Arad	7	176
2. Argeș	9	178
3. Băcău	11	179
4. Bihor	12	180
5. Bistrița – Năsăud	15	183
6. Brașov	18	184
7. București	20	185
8. Buzău	23	-
9. Călărași	24	188
10. Caraș Severin	26	-
11. Cluj	28	191
12. Constanța	32	192
13. Dâmbovița	35	194
14. Dolj	37	195
15. Gorj	44	199
16. Harghita	46	200
17. Hunedoara	51	201
18. Iași	54	204
19. Mehedinți	59	207
20. Neamț	61	208
21. Olt	64	209
22. Prahova	68	211
23. Satu – Mare	71	214
24. Sibiu	75	216
25. Suceava	77	219
26. Teleorman	78	220
27. Timiș	79	221
28. Tulcea	80	223
29. Vâlcea	82	223
30. Vaslui	83	224
31. Vrancea	85	225

II. Olimpiada națională de matematică: etapa județeană

a) clasele V-VI:

1. Bihor	94	229
2. Brașov	95	231
3. Buzău	95	231
4. Constanța	96	232
5. Dolj	97	233
6. Harghita	98	234
7. Iași	99	234
8. Olt	99	235
9. Prahova	100	235
10. Satu Mare	101	235
11. Sălaj	102	237
12. Sibiu	102	-
13. Suceava	103	237
14. Vaslui	104	238

b) clasele VII-X	105	238
III. Olimpiada națională de matematică: etapa finală	107	244
IV. Concursuri interjudețene		
1. Concursul interjudețean "Arhimede"	109	248
2. Concursul interjudețean "Pitagora"	112	249
3. Concursul "Florica T. Câmpan"	113	-
4. Concursul de matematică "Ion Ciolac"	116	249
5. Memorial "Preda Filofteia"	117	250
6. Concursul interjudețean de matematică "Prietenii lui Pitagora"	119	251
7. Memorialul "Nicolică Sanda"	120	252
8. Concursul de matematică "La școala cu ceas"	122	253
9. Concursul interjudețean de matematică "Dan Barbilian"	125	254
10. Concursul interjudețean de limba și literatura română și matematică "Ion Barbu – Dan Barbilian"	125	255
11. Concursul Doljean	126	257
12. Concursul național de matematică "Laurențiu Duican"	127	259
13. Concursul interjudețean de matematică "Gheorghe Dumitrescu"	129	261
14. Concursul interjudețean de matematică "Adolf Haimovici"	131	-
15. Concursul interjudețean de matematică "Traian Lalescu"	131	263
16. Concursul interjudețean de matematică "Academician Radu Miron"	134	266
17. Concursul interjudețean de matematică "Grigore Moisil"	136	269
18. Concursul interjudețean de matematică "Alexandru Papău Ilarian"	139	271
19. Concursul interjudețean de matematică "Nicolae Păun"	140	273
20. Concursul interjudețean "Vrânceanu – Procopiu"	142	276
21. Concursul anual al rezolvitorilor "Academician Nicolae Teodorescu"	143	278
22. Concursul interjudețean de matematică "Marian Țarină"	145	281
23. Concursul de matematică "Gheorghe Țițeica"	147	284
24. Concursul interjudețean de matematică "Mihai Viteazul"	151	289
V. Concursuri		
1. Testele de selecție a echipei României participante la a IV-a Olimpiadă balcanică de juniori	155	-
2. a) Baraje pentru selectarea lotului JBMO 2001	156	292
b) A III-a Olimpiadă balcanică de matematică pentru juniori, Bulgaria, 1999	157	295
c) A IV-a Olimpiadă balcanică de matematică pentru juniori, Macedonia, 2000 ..	158	297
d) Problemele propuse de România, care au stat în atenția celei de-a IV-a Olimpiade balcanice de juniori	158	-
e) A V-a Olimpiadă balcanică de matematică pentru juniori, Cipru, 2001	160	298
f) Alte probleme propuse juriului pentru selectare la a V-a Olimpiadă balcanică de matematică pentru juniori, Cipru, 2001	160	-
3. Al V-lea Concurs de matematică PO LEUNG KUK, PMWC	162	300
4. Al LII-lea Concurs american de matematică	165	300
VI. Concursuri din alte țări		
1. Teoria numerelor	169	305
2. Algebră	170	307
3. Geometrie	172	313

I. Olimpiada națională de matematică: etapa locală

ARAD

Clasa a V-a

1. La împărțirea a două numere naturale, câtul este de șase ori mai mic decât diferența dintre deîmpărțit și rest, împărțitorul este de trei ori mai mare decât câtul, iar restul este strict mai mare decât 4. Să se reconstituie împărțirea.
2. Fie: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 27x : 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 2^{n+2} - 3n, n \in \mathbb{N}, n \leq 3\}$, $C = \{z \mid z \text{ este ultima cifră a lui } n^2, n \in \mathbb{N}\}$.
a) Să se calculeze $A \cup B$, $A \cap B$, $A - C$.
b) Să se arate că $A \cup (B \cap C) = \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$.
3. Calculați: $(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 1992 \cdot 1993 + 1987021) : (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 1993^2)$.

Clasa a VI-a

1. Să se arate că, dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, atunci se poate forma o proporție cu numerele $(a, d), [b, c], (b, c), [a, d]$.
2. Un număr de 1236 cifre este scris cu cifrele 1, 2 și 3 și cu 12 zerouri. Numărul de apariții al cifrelor 1, 2 și 3 este direct proporțional cu respectiv 1, 2 și 3. Să se arate că numărul dat nu este pătrat perfect.
3. Trei elevi aveau la bancă a, b, respectiv c lei. Pentru a pleca într-o excursie, au scos de la bancă b%, c%, respectiv a%, din care au cheltuit c%, a%, respectiv b%, astfel încât împreună au cheltuit 1992000 lei. Să se afle ce sumă a cheltuit fiecare.
4. Fie unghiul alungit AOB, precum și unghiurile AOC și COD, în același semiplan, congruente, iar raportul măsurilor unghiurilor COD și DOB este $\frac{2}{5}$. Să se calculeze măsurile unghiurilor COD și DOB.

Clasa a VII-a

1. Să se arate că numerele de forma $A = \frac{99 \dots 9a}{99 \dots 9}$, $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, nu sunt prime.
2. Să se arate că:
$$\frac{1}{50} + \frac{1}{99} + \frac{1}{98} + \dots + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{98}{99 \cdot 100} + \frac{97}{98 \cdot 99} + \frac{96}{97 \cdot 98} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3}.$$
3. Să se arate că fracția $\frac{n^2 - n + 2}{n^2 + 3n + 2}$, $n \in \mathbb{N}$, este reducibilă.
4. Fie ABCD un paralelogram, M și N mijloacele laturilor [BC] și [CD], iar E și F simetricile punctelor D și B față de M și N. Arătați că:
a) tripletele (A, B, E), (A, D, F) și (F, C, E) sunt puncte coliniare;
b) dreptele AC, DE și BF sunt concurente.

I. 1. Cifra x pentru care egalitatea: $\overline{2x31} + \overline{24x2} + \overline{5x3} = \overline{5x16}$ este adevărată, este: Respectiv pentru oameni și copii

2. Suma $S = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \sqrt{27} + \sqrt{48} + \dots + \sqrt{300}$ are valoarea
3. La o afacere s-a pierdut 13% și s-a încasat cu 93600 mai puțin. Suma inițială este de lei.
4. Fie numerele $a = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2000}$ și $b = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{1999}{2000}$. Media aritmetică a numerelor a și b este egală cu
5. Aria unui triunghi având un unghi cu măsura de 15° și ipotenuza de 16 cm, este egală cu cm^2 .
6. Numerele pare consecutive direct proporționale cu măsurile unghiurilor unui triunghi dreptunghic, sunt:
7. Valoarea lui $a \in \mathbb{R}$ din: $[-2, 4) \cap [-a, 5) = [a, 4)$, este:
8. Dacă un dreptunghi are perimetrul de 2 cm, atunci aria sa nu va depăși cm^2 .
9. Fie $M \notin (ABC)$ astfel încât $[AM] \equiv [BM] \equiv [CM]$. Proiecția lui M pe planul (ABC) este

II. 1. Să se arate că numărul $A = n^2 + 1996n + 2$, $n \in \mathbb{N}$, nu poate fi pătrat perfect.

2. a) Să se arate că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, există $p \in \mathbb{N}$, astfel încât

$$(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2 = \sqrt{p+1} + \sqrt{p}.$$

b) Fie $a, x \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $a = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$. Să se calculeze $b = x + \frac{1}{x}$, $c = x^2 + \frac{1}{x^2}$

și $d = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$ în funcție de a .

3. Fie romb ABCD, cu măsura unui unghi ascuțit de 60° , $MA \perp (ABC)$, $MA = AB = \hat{a}$.
 - a) Să se determine măsurile unghiurilor făcute de dreptele MB, MC, MD cu planul (ABC) .
 - b) Să se determine tangenta unghiului făcut de planul (MBD) cu planul (ABC) .
 - c) Să se arate că planele (MBC) și (MCD) fac cu planul bazei unghiuri congruente.

Clasa a IX – a

1. Să se arate că există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a < \sqrt{4x^2 + 9}(\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 + 1}) \leq b$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Care este cel mai mic număr b care verifică relația?
2. Să se demonstreze că patrulaterul care se obține prin unirea mijloacelor laturilor consecutive ale unui paralelogram este tot un paralelogram. (soluție vectorială)
3. Fie ABCD paralelogram. Să se determine un punct M în interiorul paralelogramului astfel încât $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.
4. Se dau $a_k \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $a_k \geq 2$, distincte două câte două. Să se demonstreze că: $\left(1 - \frac{1}{a_1^2}\right) \left(1 - \frac{1}{a_2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{a_{n-1}^2}\right) \geq \frac{n+1}{2n}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

1. Să se rezolve:

a) $(2-i)z^2 - (4-12i)z + 14-12i = 0$ în mulțimea numerelor complexe.

b) $\alpha^n + \beta^n = -1$ unde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$, în $\mathbb{N} \cap [0; 100]$.

2. Fie $a, b, x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât:

(i) x, y, z să fie în progresie geometrică,

(ii) $x, y + a, z$ să fie în progresie aritmetică,

(iii) $x, y + a, z + b$ să fie în progresie geometrică.

Cerințe:

a) să se determine x, y, z pentru $a = 4$ și $b = 32$;

b) să se determine x, y, z pentru a, b oarecare.

3. Dacă $a, b, c \in (1, \infty)$. Să se arate că: $\left(\log_a \frac{b+c}{2}\right) \left(\log_b \frac{c+a}{2}\right) \left(\log_c \frac{a+b}{2}\right) \geq 1$.

4. Rezolvați ecuația: $\sin 26x + \cos 40x = 2$ și demonstrați că mulțimea soluțiilor acestei ecuații se poate reprezenta sub forma $\left\{ \frac{\pi}{k} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$, unde $k \in \mathbb{N}$ se va determina.

ARGES

Clasa a V-a

1. Să se arate că numărul $n = 1+2 \cdot 3+4 \cdot 5+6+7 \cdot 8+9 \cdot 10+11 \cdot 12+13 \cdot 14+15$ nu este pătrat perfect.

2. a) Să se arate că numărul $p = 13+13^2+13^3+\dots+13^{2000}$ este divizibil cu 10.

b) Să se arate că numărul 13^{2001} poate fi scris ca sumă de două pătrate perfecte.

Ioan Chera

3. Să se afle numărul $\overline{xyz}$ știind că $\overline{xyz0} + \overline{xyz} = 2002$.

Ilie Trifon

4. Se consideră mulțimea $X = \{1, 3, 5, 7, \dots, (2n+1), \dots\}$. Construim următorul șir de submulțimi ale mulțimii X : $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{3, 5\}$, $A_3 = \{7, 9, 11\}$, ș.a.m.d.

a) Scrieți mulțimile A_4 și A_5 .

b) Calculați suma elementelor mulțimii A_{20} .

Sorin Peligrad

Clasa a VI-a

1. Să se afle elementele mulțimii: $A = \left\{ \overline{xyz} \mid \frac{x+1}{x} = \frac{y+2}{y} = \frac{z+3}{z} \right\}$.

I. Safta

2. Să se arate că nu există numere naturale x, y, z astfel încât $31 \mid (4x+3y)$ și $5x = 4y+31z+1$.

Gh. Molea

3. Fie $a = \frac{7}{2x+3y}$, $b = \frac{2x+3y}{3x+1}$, $c = \frac{3x+1}{7}$, $d = \frac{25}{(x+2)^2 + (2y+1)^2}$, $x, y \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că numerele a, b, c sunt simultan naturale dacă și numai dacă d este număr natural.

Sorin Peligrad

4. a) Fie A, B, C, D patru puncte coliniare, în această ordine, astfel încât $AB+AD=2\cdot AC$ și $BD=2^{31}$ cm. Să se afle lungimea segmentului [BC].
 b) Semidreapta [OC este bisectoarea unghiului AOB, iar semidreapta [OD este interioară unghiului BOC. Știind că $m(\angle AOB) = p^\circ$ și $m(\angle COD) = q^\circ$, să se afle măsurile unghiurilor AOD și BOD.

Tică Diaconu Vasile, Dinuță Nicolae

Clasa a VII-a

1. a) Să se arate că nu există $x, y \in \mathbf{Z}$ astfel încât $x^2 + y^2 = x + y + 2001$.
 b) Fie $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, astfel încât $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} + \dots + \frac{n}{x-n} = 1$ (*) și $x = \frac{n(n+1)}{2}$. Să se arate că $\frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{9}{x-3} + \dots + \frac{n^2}{x-n} = 0$ (**).

Ion Cojocar

2. Fie $2 \cdot \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{2}{a_2 a_3} + \frac{3}{a_3 a_4} + \dots + \frac{n}{a_n a_{n+1}} \right) \geq n(n+1)$, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1} \in \mathbf{N}^*$. Să se calculeze $p = \sqrt{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n+1}} \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n+1})^{-2}$.

Gh. Molea

3. Fie $\triangle ABC$, $m(\angle B) = 105^\circ$, $m(\angle C) = 30^\circ$, $D, E \in (BC)$, $[BD] \equiv [DC]$, $\angle BAE \equiv \angle CAE$. Să se afle $m(\angle DAE)$.

Sorin Peligrad

4. În $\triangle ABC$, bisectoarea $[BB']$, $B' \in (AC)$, intersectează mediana $[AD]$, $D \in (BC)$, în P.
 a) Să se determine $n \in \mathbf{N}$, astfel încât $\frac{AP}{PD} \cdot \frac{B'C}{AB'} = 2^n$.
 b) Să se arate că, dacă triunghiurile $AB'P$ și BDP sunt echivalente, atunci P este centrul de greutate al $\triangle ABC$.

I. Safta

Clasa a VIII-a

1. Există numărul natural $\overline{xy3yx}$, care să fie pătrat perfect ?

Ilie Trifon

2. Dacă $a \in [0, 1]$ și $b \in [0, 1]$, atunci $\frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1} \leq 1$.

Sorin Peligrad

3. Fie $\triangle ABC$, $m(\angle A) = 90^\circ$, $MB \perp (ABC)$, $AC = b$, $AB = c$, $MB = a$, $MC = d$, $a, b, c, d \in \mathbf{N}$. Să se arate că: $\frac{ab+ac+bc}{a+b+c+d} \in \mathbf{N}$.

4. Fie $\triangle ABC$, [AM bisectoarea unghiului A, astfel încât $MB = 3 \cdot MC$, $M \in (BC)$, $BN = 2 \cdot NA$, $N \in (AB)$ și $AD \perp (ABC)$. Să se arate că distanța d de la A la planul (DNC) verifică relația: $d < \frac{AB + 3 \cdot AD}{6\sqrt{2}}$.

Gh. Molea

Clasa a V – a

Respect pentru oameni și cărți

1. Să se arate că suma: $S = 2001^p + 2001^p + \dots + 2001^p$, având 2000 de termeni, este divizibilă cu $87 \cdot 10^3$, unde p este număr natural.

I. Radu

2. Se dă numărul: $a = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2001}$ și propoziția p : "a este impar și a este pătrat perfect". Să se precizeze și să se justifice dacă propoziția p este adevărată sau falsă.

Gh. Gandu

3. Fie $A = \{ \overline{ab} \mid \overline{ab} = a \cdot b + a + b, a \text{ și } b \text{ sunt cifre în baza } 10 \}$. Să se determine cardinalul mulțimii A .

Costică Lupu

4. Fie numerele $a = 5n+3$ și $b = 8n+5$, $n \in \mathbb{N}$. Arătați că $[a, b] = ab$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

E. Tarasa

CLASA a VI – a

1. a) Fie numărul:

$$a = (2^3 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{10}) \left(\frac{1}{1+2+\dots+1024} + \frac{1}{1+2+\dots+1025} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+2047} \right).$$

Să se arate că $a \in \mathbb{N}$.

Fl. Ganaite

- b) Să se determine cele mai mici numere naturale nenule x, y, z, u pentru care avem:

$$\frac{x}{y} = \frac{5y}{7z} = \frac{7z}{11u} = \frac{11u}{5x}.$$

E. Tarasa

2. Suma dintre produsul și raportul a două numere naturale nenule este 260. Să se afle numerele.

V. Stoica

3. Un număr A de 2001 cifre este scris cu cifrele 4, 5, 6 și cu 606 zerouri. Numerele de apariții ale cifrelor 4, 5 și 6 sunt direct proporționale cu 4, 5 și 6. Să se arate că A nu este pătrat perfect.

Costică Lupu

4. Unghiurile $\angle AOB$ și $\angle BOC$ sunt adiacente suplimentare, $m(\angle AOB) = 45^\circ$. În același semiplan cu (OB) , construim $OD \perp OB$. Fie $[OM]$ bisectoarea unghiului $\angle BOP$ și $[OR]$ bisectoarea unghiului $\angle DOM$, unde $[OP]$ este bisectoarea lui $\angle COD$ și $[OM']$ este opusa semidreptei $[OM]$. Să se determine măsura unghiului $\angle POR$.

Cristina Andrei

Clasa a VII-a

1. Fie mulțimile: $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^2-4}{x} \in \mathbb{N} \right\}$ și $B = \left\{ y \in \mathbb{Z} \mid \frac{2y+1}{y-1} \in \mathbb{N} \right\}$.

a) Să se calculeze $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$.b) Să se arate că: $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Gh. Gandu

2. Fie $E = (a+3)(b+4)(c+5)(d+6)$, unde a, b, c, d sunt numere reale pozitive astfel încât $ad=2, bc=5$. Să se arate că $E \geq 6^4$.

Costică Lupu

3. În exteriorul triunghiului ABC oarecare se construiesc pătratele ABMN și BCDE. Știind că $P \in (AC)$, astfel încât $BP \perp ME$, precizați poziția punctului P.

E. Tarasa

4. În $\triangle ABC$ oarecare, fie $D \in (BC)$. Bisectoarea unghiului ADB intersec-tează pe AB în E. Să se arate că: $DE^2 = AD \cdot BD - AE \cdot BE$.

Costică Lupu

Clasa a VIII – a

1. a) Dacă $a \geq b \geq c > 0$, atunci $\sqrt{(a+b)(a-b)} + \sqrt{(b+c)(b-c)} < a+b$.

b) Aflați $x, y, z \in \mathbf{R}$, pentru care: $\sqrt{2x^2+12x+27} + \sqrt{y^2+4y+5} \leq 3+2z-z^2$.

I. Radu, Gh. Gandu

2. Funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ verifică relația $f(2x+1) = 3x-1, \forall x \in \mathbf{R}$. Să se determine punctele de pe graficul lui f care au coordonate întregi.

Gh. Neagu

3. Pe planul pătratului ABCD se ridică perpendiculara ME, unde $M \in (AC)$. Dacă $AE \perp CE$ și $m(\angle EBD) = 2 \cdot m(\angle CAE)$, aflați:

- a) măsura unghiului dintre planele (BDE) și (ABC);
b) măsura unghiului dreptei DE cu planul (ABC).

E. Tarasa, Costică Lupu

4. Fie $\triangle ABC$ isoscel, cu $AB = AC = a$ și $BC = a\sqrt{3}$, $MA \perp (ABC)$, $E = pr_{MCA}$ și $F = pr_{MCB}$ (proiecții ortogonale).

- a) Dacă unghiul dreptelor AE și BF este "u" și $\sin u = \frac{2}{3}$, calculați lungimea segmentului MA.

- b) Calculați "u" în cazul în care F coincide cu M.

Gh. Gandu

BIHOR

Clasa a V - a

1. Determinați baza de numerație x știind că: $123_{(x)} + 321_{(x)} = 228$.

Radu Ghenghiu, Oradea

2. Suma a trei numere este 57. Dacă împărțim primul număr la al II-lea obținem câtul 3 și restul 1, iar dacă împărțim al II-lea număr la al III-lea obținem câtul 3 și restul 1. Să se afle numerele.

3. Fie $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \leq a : 21, a = 1 + 2 + 3 + \dots + 18 + 19 + 20\}$ și $B = \{y \in \mathbf{N} \mid 9 < y \leq 15\}$. Calculați: $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$.

4. Comparați numerele $a = 2^{90} + 2^{90} + 2^{91} + 2^{92}$ și $b = 3^{62}$.

- I. Să se determine elementele mulțimii: $A = \{ \overline{abc} \in \mathbb{N} \mid \overline{ab}^2 + \overline{ab}^2 \cdot \overline{ac} = 2000 \}$

Respect pentru oameni și cărți.

- II. La teza de matematică elevii unei clase au primit o problemă de algebră și una de geometrie. Se știe că 5 elevi au rezolvat corect ambele probleme, 68% au rezolvat corect problema de algebră, iar 52% au rezolvat corect problema de geometrie. Să se afle:

- câți elevi sunt în clasă;
- câți elevi au rezolvat corect problema de algebră;
- câți elevi au rezolvat corect problema de geometrie.

- III. Arătați că numărul $A = \frac{8}{9} + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{9} \cdot 10^n$ este număr natural, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

- IV. Fie punctele $A, O, B \in d$, scrise în această ordine, iar punctele C și D situate de o parte și de alta a dreptei " d " astfel încât $m(\widehat{AOC}) = 10^\circ$, iar $m(\widehat{BOD}) = \frac{4}{17} \cdot m(\widehat{BOE})$, unde (OE) este bisectoarea unghiului $(\widehat{BOC})$. Să se arate că orice punct Q de pe bisectoarea unghiului $\widehat{BOD}$ este coliniar cu punctele O și C .

Romulus Pleșa, Viorica Pleșa, Oradea

- V. Dacă adunăm jumătatea, sfertul și optimea măsurii unghiului x , obținem suplementul său. Care este măsura complementului suplementului unghiului x ?

Clasa a VII - a

- I. Să se determine baza de numerație x , știind că:

$$\sqrt{(25_{(x)} + 52_{(x)}) \cdot (34_{(x)} + 43_{(x)})} - 1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2.$$

Radu Ghenghiu, Oradea

- II. Să se arate că numărul 24^n se poate scrie ca o diferență de două pătrate perfecte nenule, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Florin Nicoară, Oradea

- III. Să se determine numerele naturale, prime x, y, z știind că:

$$(x + 3y - 4z)(8x - 36) = (2x - 3y + 4z)(36 - 5x).$$

Romulus Pleșa, Viorica Pleșa, Oradea

- IV. În pătratul $MNPQ$ notăm cu O intersecția diagonalelor și cu G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor MON, NOP, POQ respectiv QOM . Să se arate că G_1, G_2, G_3, G_4 sunt vârfurile unui pătrat.

Szabó Gyöngyi, Oradea

- V. În patrulaterul convex $ABCD$ se știe că: $\widehat{BAD} \equiv \widehat{ADC}$, $M \in [AD]$, $MA = MD$, $AB \cap CD = \{N\}$, Știind că distanțele de la punctul O la laturile AB și CD sunt egale, să se demonstreze că punctele M, O și N sunt coliniare.

Florin Nicoară, Oradea

1. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x - y + 1 = 0$ și $y \in [1, 3]$. Arătați că:

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13} = 2\sqrt{2}$$

2. Să se demonstreze că numărul

$$P = x(x + 1)^2 - 26x - 8(x + 1)^2 + 2 \text{ este divizibil cu } 3, \forall x \in \mathbb{Z}.$$

3. Fie prisma patrulateră regulată ABCDA'B'C'D'. Diagonala BD' formează cu fața ADD'A' un unghi de 30° . Știind că latura bazei este a să se afle:

a). d(B', AD');

b). d(D', AC);

c). fie E și F mijloacele muchiilor CC' respectiv AB. Să se afle aria triunghiului EFD'.

Clasa a IX - a

I. Se consideră ecuația :

$$x^2 + (m-3)x + \left[\frac{k+1}{k}\right] + \left[\frac{k+2}{k+1}\right] + \dots + \left[\frac{k+m}{k+m-1}\right] + 4 = 0, \text{ unde } m \in \mathbb{N}^*,$$

$k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, iar [...] reprezintă partea întreagă a numărului respectiv.

a) Să se determine $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât între rădăcinile ecuației să existe relația

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{8}{3}.$$

b) Să se determine între rădăcinile ecuației o relație independentă de m.

II. Să se demonstreze că $\forall a, b > 0$ astfel încât $a + b = 1$ are loc inegalitatea :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq 3\sqrt{2}$$

Andras Szilard, Cluj

III. Să se determine o formulă pentru calculul sumei de mai jos , apoi să se demonstreze veridicitatea acesteia prin metoda inducției matematice:

$$S = [\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}] + [\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}] + \dots + [\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}], n \in \mathbb{N}^*$$

unde [...] reprezintă partea întreagă a numărului respectiv.

Ioan Cuc, Oradea

IV. Să se demonstreze că distanța de la centrul cercului circumscris unui triunghi oarecare la o latură a sa, este egală cu jumătatea distanței de la ortocentrul triunghiului la vârful opus acestei laturi.

V. Se consideră triunghiul ABC cu lungimile laturilor $AB = c, AC = b, BC = a$.

Se notează cu P intersecția dintre mediana BD ($D \in [AC]$) și bisectoarea CE a unghiului BCA ($E \in [AB]$). Să se determine în funcție de lungimile laturilor triunghiului ABC, numerele reale x și z astfel încât să aibă loc relația :

$$\overrightarrow{PA} = x\overrightarrow{PB} + y\overrightarrow{PC}$$

I. a) Să se demonstreze că $\forall a, b, c, d \in \mathbf{R}_+$ are loc inegalitatea:

Respect pentru oameni, și $\sqrt{ac} + \sqrt{bd} \leq \sqrt{(a+b)(c+d)}$

b) Să se demonstreze că:

$$\sqrt{a \cdot \log_{a+b} \sqrt{2a}} + \sqrt{b \cdot \log_{a+b} \sqrt{2b}} \leq \sqrt{a+b} \quad \forall a, b \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

II. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} 4^x + 98 = 2 \cdot 3^{y+2} \\ 9^y - 31 = 2 \cdot 5^{z+1} \\ 25^z + 103 = 2^{x+4} \end{cases}$$

prof. Romulus Pleșa, prof. Viorica Pleșa, Oradea

III. Să se demonstreze că dacă $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbf{C}^*$ și $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n|$ atunci:

$$\left(1 + \frac{z_2}{z_1}\right) \left(1 + \frac{z_3}{z_2}\right) \dots \left(1 + \frac{z_n}{z_{n-1}}\right) \left(1 + \frac{z_1}{z_n}\right) \in \mathbf{R}.$$

IV. Măsurile unghiurilor unui triunghi se notează cu α, β, γ . Dacă $(1 + \operatorname{tg} \alpha) \cdot (1 + \operatorname{tg} \beta) = 2$, să se calculeze γ .

V. Să se determine $x \in \mathbf{R}$ pentru care $\log_2 1, \log_2 (-\cos 2x), \log_2 \cos^2 x$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

BISTRIȚA - NĂȘĂUD

Clasa a V - a

I. 1. Rezultatul calculului:

a) $10 \cdot \{4 + 10 \cdot [2 + 10 \cdot (48 + 48 \cdot 4)]\}$ este

b) $2^{15} \cdot 4^{20} \cdot 8^3 \cdot 16^5$ este

2. Rezultatul sumei în baza 10:

a) $11101_{(2)} + 1211_{(3)} + 2113_{(4)}$ este

b) $120_{(4)} + 242_{(5)} + 36_{(7)}$ este

3. Elementele mulțimii:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, -2 \leq x \leq 3\}$ sunt

b) $B = \{y \mid y \in \mathbf{N}, 3 < y < 9\}$ sunt

4. Toate numerele de forma:

a) $\overline{2a3b}$: 360 sunt;

b) $\overline{13x2y}$: 45 sunt

5. Forma simplă prin care numărul $A = 63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+2}$ se poate arăta că este divizibil cu 13 este

6. Aflați numerele naturale x și y pentru care fracția:

a) $\frac{4}{(x+1)(y-3)}$ este supraunitară;

b) $\frac{4}{(x+1)(y-3)}$ este echiunitară.

- II. 7. Să se arate că numărul $A = \overline{xyzt} + \overline{tzyx}$ se divide cu 11.
8. Un număr natural de 3 cifre, scris în baza 10, împărțit la răsturnatul său dă câtul 2 și restul 100. Aflați numărul, știind că diferența dintre cifra sutelor și cea a unităților este 4.

Clasa a VI – a

- I. 1. Dacă $n = 35 + 5x + 10y$ și $x + 2y = 21$, atunci:
- numărul n este
 - valoarea logică a propoziției $7|n$ este
2. Rezultatul calculului:
- $2,(3):3\frac{1}{2} = \dots\dots\dots$
 - $2,1(6)-2,(3):3\frac{1}{2}-\frac{2}{3} = \dots\dots\dots$
3. Se știe că $\frac{x}{5} = \frac{y}{20}$.
- Valoarea raportului $\frac{x}{y}$ este
 - x reprezintă % din y .
4. Două unghiuri sunt adiacente suplementare.
- Măsura unghiului format de bisectoarele lor este°.
 - Dacă unul din ele are măsura $58^\circ 36'$, atunci celălalt are măsura
5. Unghiul ascuțit format de două drepte concurente reprezintă 20% din măsura unghiului obtuz.
- Măsura unghiului obtuz este°.
 - măsura unghiului ascuțit este°.
6. Pe o dreaptă se consideră punctele A, B, C în această ordine. M este mijlocul lui [AB], N mijlocul lui [BC], $MN = 8$ cm și $BC = 6$ cm. Atunci:
- lungimea lui [AB] este cm;
 - lungimea lui [MC] este cm.
- II. 1. Să se determine măsurile u și v a două unghiuri complementare, știind că
- $$\frac{u}{v} = \frac{a,(b)}{b,(a)}, \text{ iar } b \text{ este un divizor impropriu al lui } a.$$
2. Fie segmentul [AB] și punctele C și D în același semiplan față de dreapta AB, astfel încât $[AD] \equiv [BC]$, $m(\angle DAB) = m(\angle CBA) < 90^\circ$ și $(AC) \cap (DB) = \{O\}$. Demonstrați că:
- $[AC] \equiv [BD]$;
 - $\triangle DOC$ este isoscel.

Ioan Duicu

Clasa a VII - a

- I. 1. Efectuând calculele $\left(\frac{3}{\sqrt{75}} - \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{2}{5\sqrt{3}} \right) : (\sqrt{12})^{-1}$ obținem: